Concours STIC/GIC session 2016

Composition : **Mathématiques 4** (analyse)

Durée : **4 Heures**

NB : **La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. L'usage des calculatrices scientifiques et de tout matériel électronique est autorisé. Si au cours de l'épreuve le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.**

Exercice 1 :

Soit α un nombre réel positif. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_n = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}u_{n-k} \text{ pour } n \geqslant 1$$

et l'on désigne par $S(z)$ la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$.

1) En supposant le rayon de convergence de $S(x)$ non nul, comparer dans le disque de convergence les séries $zS^2(z)$ et $S(z)$.

2) Développer en série entière la fonction $T(z) = \dfrac{1-\sqrt{1-4\alpha z}}{z}$ au voisinage de 0 et déterminer le rayon de convergence.

3) Déduire de ce qui précède l'expression de $S(z)$ et son rayon de convergence.

4) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

5) Pour quelles valeurs de α la série (u_n) converge-t-elle ? Quelle est alors sa somme ? (On étudiera aussi la convergence pour les valeurs limites de α)

Exercice 2 :

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

1) On pose $F = [0, 1] \times [0, 1]$, justifier que la fonction f est bornée sur F et y atteint sa borne supérieure. On pose alors $M = \sup\limits_{(x,y)\in F} f(x, y)$.

2) Montrer que si la borne supérieure est atteinte en un point de l'ouvert $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ alors nécessairement $M = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

3) Déterminer le maximum de la fonction f sur la frontière de F et le comparer à $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (on pourra utiliser la calculatrice). Déterminer M.

Problème : Échanges de limites et d'intégrales

Toutes les fonctions de ce problème sont à valeurs réelles.

Partie Préliminaire

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

1) **Fonction Gamma d'Euler**

a. Soit $x \in]0,+\infty[$, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On pose, pour $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

b. Déterminer, pour $x \in]0,+\infty[$, une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n.

2) **Fonction zêta de Riemann**

On rappelle que la fonction zêta est définie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On connaît $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, on sait que pour p pair, $\zeta(p)$ est de la forme $q\pi^p$ où q est un rationnel ; il a été démontré que certains $\zeta(p)$ pour p entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous.

On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels $\zeta(p)$.

a. On note, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}.$$

Prouver que, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$.

b. On fixe l'entier $p \geqslant 2$ et un réel $\varepsilon > 0$. Indiquer une valeur de n pour laquelle on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right| \leqslant \varepsilon.$$

c. Donner, en utilisant la calculatrice, une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} près.

Première partie : Suites de fonctions

Préliminaire : *Dans les questions 3 à 5 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée, énoncé à la question 6.*

3) **Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions**
Démontrer le théorème suivant que l'on notera **TH 1** :
si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$, alors, la suite de réels $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ converge vers le réel $\int_a^b f(x)dx$. On commencera par donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ juste en énonçant un théorème.

4) **Exemples et contre-exemples**

a. Déterminer une suite (f_n) de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment $[0,1]$ qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$ et telle que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)$ ne converge pas vers le réel $\int_0^1 f(x)dx$.
Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer $f_n(x)$, mais on attend une justification des deux propriétés demandées.

b. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$, démontrer qu'il est possible que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)$ converge vers le réel $\int_0^1 f(x)dx$ sans que la convergence de la suite de fonction (f_n) ne soit uniforme sur $[0,1]$.

5) **Cas d'un intervalle quelconque**

a. Montrer à l'aide de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $I=[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ que le **TH 1** n'est pas vrai si on remplace l'intervalle $[a,b]$, par un intervalle I non borné.
Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.

b. Nous allons prouver que le **TH 1** est vrai sur un intervalle borné I.
On considère $f_n)$ une suite de fonctions continues et intégrables sur I intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction f sur I.

i- Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout réel $x\in I$, $|f(x)|\leqslant 1+|f_p(x)|$ et en déduire que f est intégrable sur I.

ii- Montrer que la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)dx\right)$ converge vers le réel $\left(\int_I f(x)dx\right)$. On notera $\ell(I)$ la longueur de l'intervalle I.

6) **Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions**
On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 2** :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout entier naturel n et tout réel $x\in I$: $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$ alors, la fonction f est intégrable sur I et la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)dx\right)$ converge vers le réel $\left(\int_I f(x)dx\right)$.

a. Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise ce **TH 2**, que les fonctions f_n sont intégrables sur I et justifier que f est intégrable sur I.

b. Exemples

i- Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratique sur un segment I sur lequel la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction f.

ii- Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2}dx$.

Deuxième partie : Séries de fonctions

7) Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Justifier, simplement, à l'aide du **TH 1** le théorème suivant que l'on notera **TH 3** :
si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$, alors, la série de réels $\displaystyle\sum\int_a^b f_n(x)dx$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx.$$

8) Intégration terme à terme d'une série de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 4** :
si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I telle que la série $\displaystyle\sum\int_I|f_n(x)|dx$ converge, alors f est intégrable sur I, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I f_n(x)dx$ converge et

$$\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}\int_I f_n(x)dx=\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx.$$

Application : théorème de Hardy

On suppose que $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

a. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_nx^n}{n!}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction $x\mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}dx$ comme somme d'une série numérique.

9) Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas

a. Montrer que, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^nx^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle borné $I=[0,1[$ (donc les hypothèses du théorème **TH 3** ne sont pas toutes vérifiées).

b. Montrer que, pour la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^nx^n$ sur $I=[0,1[$, les hypothèses du théorème **TH 4** ne sont pas toutes vérifiées.

c. Montrer que, néanmoins, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^1 (-1)^n x^n dx$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \right) dx.$$

10) **Théorème de convergence monotone**

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I. On suppose que toutes les fonctions f_n sont positives sur I et que la fonction f est intégrable sur I.

On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in I$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée **TH 2**, et en déduire que :

la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I f_n(x)dx$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$

Fin de l'énoncé.